# 第9章 曲线积分与曲面积分

- 曲线积分
- 格林公式及其应用
- 曲面积分
- 高斯公式、通量与散度
- 斯托克斯公式、 环流量与旋度

# 9.1 曲线积分

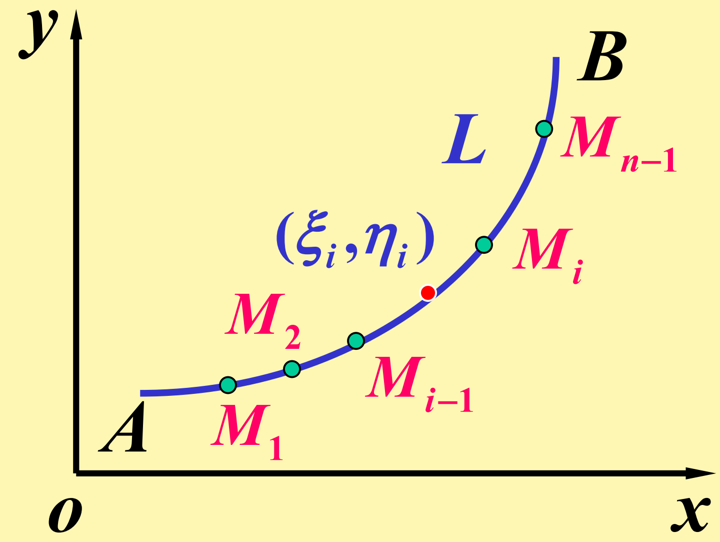
9.1.1 对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

9.1.2 对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

9.1.3 两类曲线积分之间的联系

## 9.1.1 对弧长的曲线积分

### 1 引例




实例: 曲线形构件的质量

线密度函数为 $\rho(x,y)$

分 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$

匀 取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$, $\Delta M_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$.

合 $$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$$ 近似值

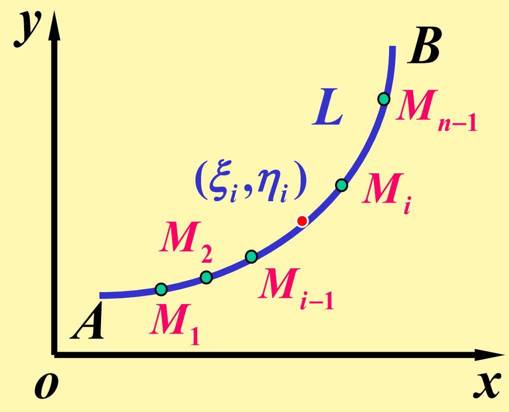
精 $$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$ 精确值

## 2 对弧长的曲线积分的定义

设$L$为$xoy$面内一条光滑曲线弧,函数$f(x,y)$在$L$上有界，用$L$上的点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$把$L$分成$n$个小段，设第$i$个小段的长度为$\Delta s_i$,又$(\xi_i, \eta_i)$为第$i$个小段上任意取定的一点,

作乘积$f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$,

并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$,



如果当各小弧段的 长度的最大值 $\lambda \to 0$时，这和的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧$L$上对弧长的曲线积分或 第一类曲线积分，记作$\int_L f(x,y)ds$，即

被积函数

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i}.$$

积分和式

积分弧段

曲线形构件的质量 $M = \int_L \rho(x,y)ds.$

存在条件 当 $f(x, y)$在光滑曲线弧 $L$上连续时,

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y)ds$ 存在。

推广

函数 $f(x, y, z)$在空间曲线弧 $\Gamma$上对弧长的曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x, y, z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\Delta s_i$$

思考 (1) 若在$L$上$f(x, y) = 1$,则$\int_L ds$表示什么?

(2) 为什么被积函数有两个（三个）变量，但是积分符号只有“一重”?

注意：（1）对弧长的曲线积分的定义中$\Delta s_i$的符号永远为正，它表示弧段的长度.

（2）函数$f(x,y)$在封闭曲线$L$上对弧长的曲线积分记为$\oint_L f(x,y)ds$。

性质 (1) $\int_L ds = s$，其中$s$表示曲线弧长；

（2）$\int_L [k\,f(x,y)+l\,g(x,y)]ds$

$$= k\int_L f(x,y)ds + l\int_L g(x,y)ds$$

（3）若 $L$(或$\Gamma$)是分段光滑的，$(L = L_1 + L_2)$

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds$$

（4）若 $f(x,y) \le g(x,y)$,则$\int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds$

（5） $\left|\int_L f(x,y)ds\right| \le \int_L |f(x,y)|ds$

（6） 若$m \le f(x,y) \le M$,则

$$ms \le \int_L f(x,y)ds \le Ms$$

## 3. 对弧长曲线积分的计算

**定理** 设$f(x,y)$在曲线弧$L$上有定义且连续，

$L$的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$，其中

$\phi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数。 则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$$(\alpha < \beta)$$

**注意** 由于$ds>0$,所以$dt>0$.

定积分的下限$\alpha$一定要小于上限$\beta$;

$$f(x,y) \qquad L: \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (\alpha < \beta)$$

计算方法

化为对参数的定积分，“一代二换三定限”

“一代”：将 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 代入被积函数 $f(x,y)$；

“二换”：将 $ds$ 换成 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

“三定限”：$\alpha,\beta$ 对应于L的两个端点，下限小，上限大。

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$$

特殊情形

(1) $L: y=\psi(x) \qquad a\le x\le b$ $\quad L: \begin{cases} x=x, \\ y=\psi(x) \end{cases}$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx \quad (a<b)$$

(2) $L: y=0,\ a\le x\le b.\qquad f(x,y)=\varphi(x),$

则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b \varphi(x)\sqrt{1+0}dx=\int_a^b \varphi(x)dx$

为定积分。定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否！ 对弧长的曲线积分中要求$ds>0$,

但定积分中下限可以大于上限, $dx$ 可以为负.

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$$

(3) $L: x=\varphi(y) \qquad c\le y\le d$ $\qquad L: \begin{cases} x=\varphi(y) \\ y=y \end{cases}$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$$

(4) $L: \rho=\rho(\theta) \quad \alpha\le\theta\le\beta$ $\qquad L: \begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$

$$f(x,y) \qquad L: \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta)$$

推广

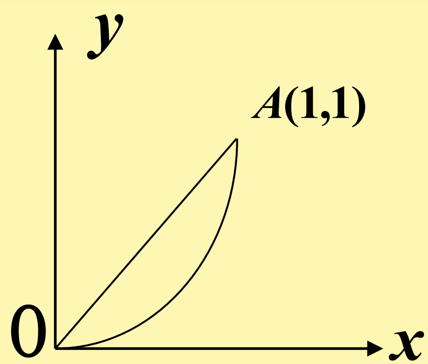
$$\Gamma: x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ z=\omega(t). \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

$$(\alpha < \beta)$$

例1 计算$\oint_L \sqrt{y}ds$. $L: y = x^2, y = x$ 所围区域的边界。



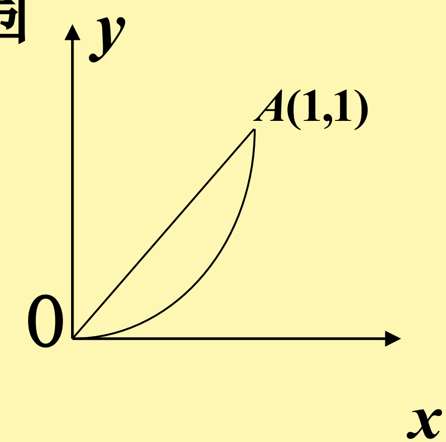

解 $I = \oint_L \sqrt{y}ds = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overset{\frown}{OA}}$

$$\overline{OA}: \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases}, \quad 0 \le x \le 1 \qquad \int_{\overline{OA}} = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+1}dx$$

$$\text{或}\overline{OA}: \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}, \quad 0 \le y \le 1 \qquad \int_{\overline{OA}} = \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+1}dy$$

$$\overset{\frown}{OA}: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}, \quad 0 \le x \le 1 \qquad \int_{\overset{\frown}{OA}} = \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}dx$$

例1 计算$\oint_L \sqrt{y}ds$. $L: y = x^2, y = x$ 所围区域的边界。




解 $I = \oint_L \sqrt{y}ds = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overset{\frown}{OA}}$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+1}dx + \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}dx$$

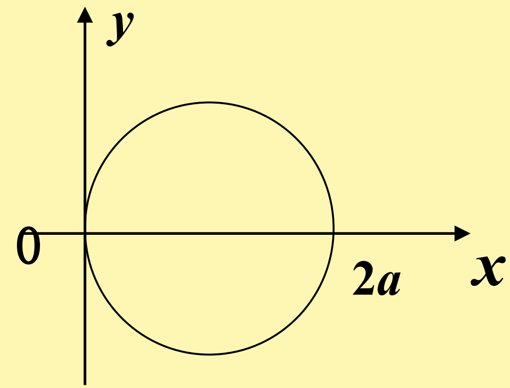
$$= \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{1}{8}\int_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4x^2)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{13}{12}\sqrt{5} - \frac{1}{12}$$

**例2** 计算 $\oint_L (x^2+y^2)ds$，其中 $L: x^2+y^2=2ax$

$$\oint_L (x^2+y^2)ds$$

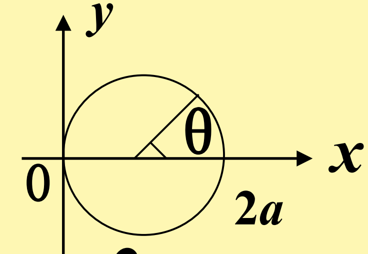
$$=\oint_L 2ax\,ds$$




说明：$f(x,y)$中$x,y$相互有关，由曲线的方程给出它们的相关性。

例2 计算 $\oint_L (x^2+y^2)ds$，其中 $L: x^2+y^2=2ax$

解法一：$L:\begin{cases} x=a+a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$




$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\,d\theta \qquad \oint_L (x^2+y^2)ds=\oint_L 2ax\,ds$$

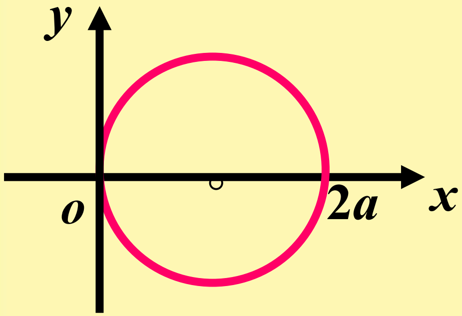
$$I=\int_0^{2\pi} 2a^2(1+\cos\theta)\cdot a\,d\theta=2a^3(\theta+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=4\pi a^3$$

解法二：曲线$L$为$\rho=2a\cos\theta$

也可设$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=2a\cos\theta\cdot\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=2a\cos\theta\cdot\sin\theta \end{cases}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\cdot 2a\cos^2\theta\cdot\sqrt{(2a\cos\theta)^2+(-2a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

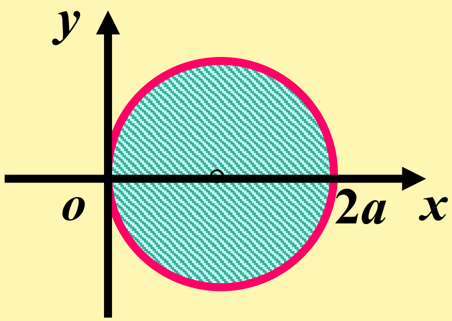
**例2** 计算 $\oint_L (x^2 + y^2) ds$，其中 $L: x^2 + y^2 = 2ax$




对比：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = 2a\cos\theta \cdot \cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = 2a\cos\theta \cdot \sin\theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

曲线$L$: $\rho = 2a\cos\theta$




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \le r \le 2a\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$D: x^2 + y^2 \le 2ax$

例3 计算曲线积分$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$，其中Γ为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$ 上相对于 $t$ 从0到2π的一段弧。

解 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]$$

$$\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

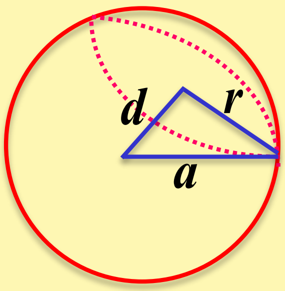
$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例4　计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$ ，其中

（1）$L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$

（2）$L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=a$

解　（1）$I=\int_L a^2 ds = a^2\int_L ds = 2\pi a^3$




（2）$I=\int_L a^2 ds = a^2\int_L ds$

设$r$为圆$L$的半径　$d=\dfrac{|0+0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$r=\sqrt{a^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$　$I=a^2\cdot 2\pi r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi a^3$

**例5** 计算 $\int_{\overline{AB}}(3x-2y+z)ds$,其中 $AB$ 为连结 $A(0,1,1),B(1,3,-1)$ 的直线段。

**解** 直线 $AB$ 的方程 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}=t$

$AB$ 的参数方程为 $x=t,\ y=1+2t,\ z=1-2t \quad (0\le t\le 1)$

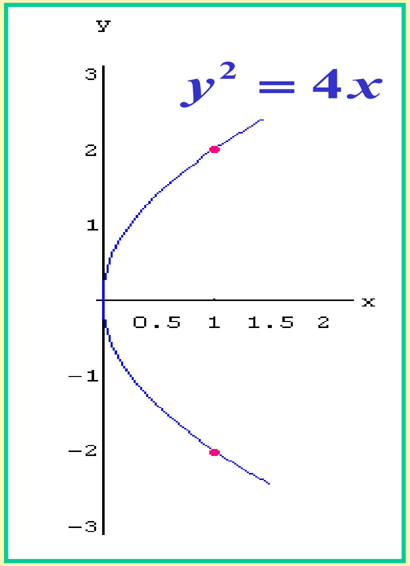
$$I=\int_0^1[3t-2(1+2t)+(1-2t)]\cdot\sqrt{1+4+4}dt$$

$$=3\int_0^1(-3t-1)dt$$

$$=-3\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)\Bigg|_0^1=-\frac{15}{2}$$

例 6 求$I=\int_L y\,ds$,

其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,−2)一段.




解法一:

设$L_1$为$x$轴上方的曲线,$L_2$为$x$轴下方的曲线

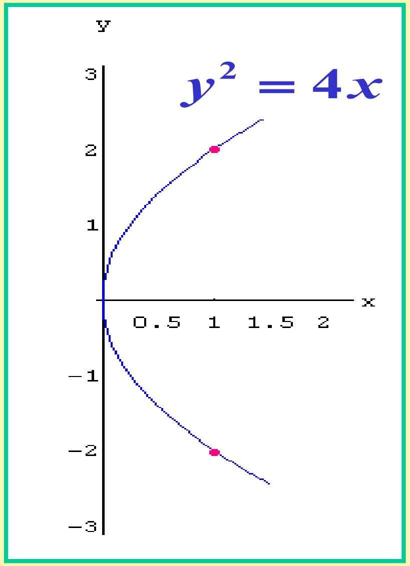
$$I=\int_L y\,ds=\int_{L_1}+\int_{L_2}$$

$$L_1: \ y=2\sqrt{x}, \ 0\le x\le 1 \quad L_2: \ y=-2\sqrt{x} \ \ 0\le x\le 1$$

$$I=\int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx+\int_0^1(-2\sqrt{x})\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=0$$

例 6 求$I=\int_L y\,ds$,

其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,−2)一段.




解法二:

$$L:\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{4}, & -2\le y\le 2 \\ y=y \end{cases}$$

$$I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy \;=0.$$

曲线关于$x$轴对称，被积函数关于$y$为奇函数

例2 计算 $\oint_L (x^2+y^2)ds$，其中 $L: x^2+y^2=2ax$

解法三：$\oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}$

$L_1$: $y=\sqrt{2ax-x^2}\quad 0\le x\le 2a$

$L_2$: $y=-\sqrt{2ax-x^2}\quad 0\le x\le 2a$

$$=\int_0^{2a} 2ax\cdot\sqrt{1+\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)^2}dx+\int_0^{2a} 2ax\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)^2}dx$$

曲线关于 $x$ 轴对称，被积函数关于 $y$ 为偶函数

1、若曲线关于$x,y$轴或原点对称：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1}\Big(f(x,y)+f(\text{对称点})\Big)ds$$

其中$L_1$为$L$的上(右)半曲线[靠近第一象限的部分]

2、若$L$关于直线$y=x$对称，

即当$(a,b)\in L$时，必有$(b,a)\in L$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L[f(x,y)+f(y,x)]ds$$

$\int_L f(x,y)ds$ 的对称性与 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 相同；

$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$ 的对称性与 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$ 相同。

**例4** 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$ ，其中

（1） $L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$

**解** （1） $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$

$$= \int_L a^2 ds = a^2 \int_L ds = 2\pi a^3$$

问题：如何计算 $\oint_L (x^2+x)ds$？

$$L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$$

$$\oint_\Gamma (x^2+x)ds = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds + \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x+y+z)ds$$

$$= \frac{1}{3}\int_\Gamma a^2 ds + \frac{1}{3}\int_\Gamma 0 ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds = \frac{2}{3}\pi a^3$$

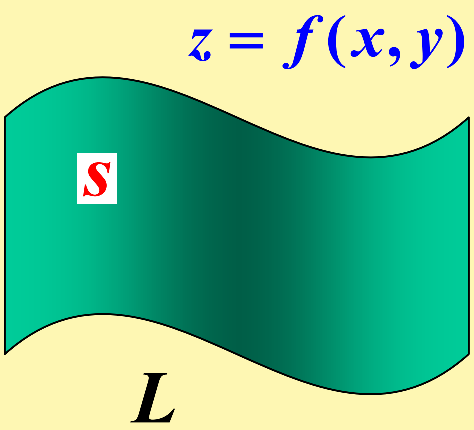
## . 几何与物理意义

(1) 当$\rho(x,y)$表示$L$的线密度时,

$$M=\int_L \rho(x,y)ds;$$

(2) 当$\rho(x,y)\equiv 1$时, $L_{弧长}=\int_L ds$;

$\int_L f(x,y)ds$ 的 几 何 意 义:




(3) 当$f(x,y)$表示立于$L$上的柱面在点$(x,y)$处的高时,

$$S_{柱面面积}=\int_L f(x,y)ds.$$

(4) 曲线弧对 $x$轴及 $y$轴的转动惯量，

$$I_x = \int_L y^2 \rho ds, \qquad I_y = \int_L x^2 \rho ds.$$

(5) 曲线弧的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}.$$

## 5. 小结

1、对弧长曲线积分的概念

2、对弧长曲线积分的计算

3、对弧长曲线积分的应用